Derivace funkce

Derivace je základním pojmem v diferenciálním počtu. Má uplatnění tam, kde se zkoumá povaha funkčních závislostí určitých proměnných (veličin). V matematice, ekonomii, fyzice ale i v jiných vědních oborech. Pokud funkce popisuje závislost proměnné y na proměnné x, poté její derivace představuje závislost rychlostí změn y na x.

Funkce f má v bodě x_0 $\left(x_0 \in D(f)\right)$ derivaci, pokud x_0 je vnitřní bod $D(f)$ a existuje limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Jestliže tato limita neexistuje nebo pokud funkce f není v bodě x_0 definována, pak funkce f nemá v bodě x_0 derivaci. V opačném případě mluvíme o *derivaci funkce* f *v bodě* x_0.

Z pohledu geometrické interpretace vyjadřuje derivace $f'(x_0)$ směrnici (sklon) tečny t, sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P = [x_0; f(x_0)]$.

Jestliže existují vlastní derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$ pro všechna $x \in (a; b)$, pak existují vlastní derivace funkcí $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) * g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $g(x) \neq 0$ a platí:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x),$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x),$$

$$\left(f(x) * g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(c * f(x)' = c * f'(x).$$

V tabulce číslo 2 je zobrazen přehled vzorců pro derivaci vybraných elementárních funkcí.

Tab. 1: Přehled základních vzorců derivací

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
c	0	c je konstanta
x	1	$x \in (-\infty; \infty)$
x^n	nx^{n-1}	$x \in (-\infty; \infty)$, n je libovolná konstanta
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty; \infty)$, $a > 0$
e^x	e^x	$x \in (-\infty; \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty; \infty)$

Funkce $f(x)$ je po derivování opět funkcí, její definiční obor je buď roven definičnímu oboru funkce f, anebo je jeho podmnožinou. V případě, že má funkce $f'(x)$ derivaci, označujeme ji jako druhou derivaci funkce $f(x)$ a značíme ji ve tvaru $f''(x)$. Obecně *n-tou derivaci funkce* f definujeme vztahem $f^n(x) = (f^{n-1}(x))'$.

1.1.1 Monotónnost a extrémy funkce

Monotónnost funkce vyjadřuje, zda je funkce f v bodě (na intervalu) rostoucí či klesající. Tuto vlastnost funkce vyšetřujeme pomocí znaménka první derivace.

Určíme a na číselnou osu vyneseme všechny **stacionární body** funkce $f(x)$, tzn. body ve kterých je $f^{'}(x) = 0$ nebo body ve kterých první derivace neexistuje. Derivace může měnit znaménko právě a pouze v těchto bodech.

Je-li funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I spojitá, má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu I derivaci a v každém bodě intervalu platí:

$f^{'}(x) > 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **rostoucí**,

$f^{'}(x) \geq 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **neklesající**,

$f^{'}(x) < 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **klesající**,

$f^{'}(x) \leq 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **nerostoucí**.

V případě, že pro funkci $f(x)$ platí $f(x) > f(x_0)$, poté má funkce v bodě x_0 lokální minimum. V případě, že pro funkci $f(x)$ platí $f(x) < f(x_0)$, poté má funkce v bodě x_0 lokální maximum. Tato lokální maxima a lokální minima funkce mohou nastávat pouze ve stacionárních bodech, označujeme je jako **lokální extrémy.**

O **globálních extrémech** mluvíme, pokud funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I \subseteq D(f)$ globální maximum (minimum), kdy pro každý bod $x \in I$, takový že $x \neq x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$).

1.1.2 Konvexnost a konkávnost

Konvexnost a konkávnost udává zakřivení grafu funkce f, které vyšetřujeme pomocí znaménka druhé derivace.

Určíme a na číselnou osu vyneseme všechny body funkce $f(x)$, ve kterých je $f^{'}(x) = 0$. Derivace může měnit znaménko právě a pouze v těchto bodech.

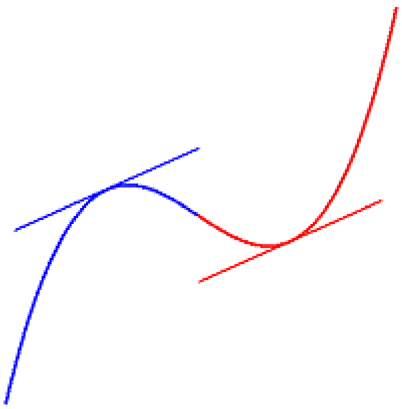
Je-li funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I spojitá, má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu I derivaci a v každém bodě intervalu platí:

$f^{'}{}'(x) > 0$ pak $f(x)$ je na intervalu I **konvexní**,

$f^{'}{}'(x) < 0$ pak $f(x)$ je na intervalu I **konkávní.**

Pokud existuje levé okolí bodu x_0, v němž je funkce $f(x)$ konvexní (konkávní) a pravé okolí bodu x_0, v němž je funkce konkávní (konvexní), poté mluvíme o **inflexním bodu** funkce v bodě x_0.

Na obrázku číslo 20 je modře znázorněna konkávní část grafu funkce f (graf v tomto intervalu leží pod tečnou), červeně pak část konvexní (graf v tomto intervalu leží nad tečnou). V místě, kde se barva funkce mění z modré na červenou, se nachází inflexní bod.



Obr. 1: Konvexnost a konkávnost (Zdroj: http://sk.wikipedia.org/wiki/Konvexná_funkcia)

1.1.3 Vyšetřování průběhu funkce

Vyšetření průběhu funkce je postup, kterým získáme všechny potřebné vlastnosti k tomu, abychom zjistili základní rysy chování funkce. Výstupem tohoto postupu je co nejvěrnější model grafu funkce.

Při vyšetřování dodržujeme posloupnost těchto kroků:

1 Určení definičního oboru a bodů nespojitosti.

2 Určení průsečíků s osami, nulových bodů (kde je funkce kladná a záporná), chování funkce v krajních bodech intervalů D(f) a základních vlastností funkce.

3 Vyšetření monotónnosti funkce a určení lokálních extrémů.

4 Vyšetření konvexnosti, konkávnosti a určení inflexních bodů.

5 Určení asymptot grafu funkce.

6 Stanovení tabulky několika funkčních hodnot.

7 Načrtnutí grafu funkce.

Seznam použité literatury

(1) *Matematika polopatě - pro základní, střední a vysoké školy* [online]. [cit. 2012-05-05]. Dostupné z: http://www.matweb.cz/

(2) MEZNÍK, Ivan. *Matematika I*. Vyd. 8., přeprac. /. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 150 s. ISBN 978-80-214-3725-8.

(3) MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL. *Matematika pro studenty ekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 272 s. ISBN 978-80-247-3260-2.

(4) NAVRÁTIL, Miroslav. *Matematika I.*: *pro distanční studium vysokých škol*. Vyd. 1. Ostrava: Key Publishing, 2008, 198 s. ISBN 978-80-87255-06-3.

(5) REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 874 s. ISBN 0-393-95733-0.

(6) SIMON, Carl P a Lawrence BLUME. *Mathematics for economists*. New York: W.W. Norton, c1994, 930 s. ISBN 03-939-5733-0.