Funkce více proměnných

U funkce jedné proměnné jsme uvedli, že se v životě běžně setkáváme se vztahem závislosti mezi různými proměnnými. Uvedli jsme jako příklad cenu akciového titulu v závislosti na čase nebo teplotu v místnosti v závislosti na množství dodaného tepla. Dodali jsme, že matematickým modelem takovéto závislosti je *funkce*.

Běžně se však setkáváme se vztahy, kde se vyskytuje více nezávislých proměnných. Například zmíněnou teplotu v místnosti neovlivňuje pouze množství dodaného tepla, ale závisí také na venkovní teplotě, izolaci domu, způsobu vytápění apod. Rovněž vztahy v ekonomii závisí na více proměnných – příkladem může být poptávka po zboží. Ta závisí nejenom na ceně daného zboží, ale i na jeho dostupnosti, ceně jeho substitutu, značce, kupní síle jeho spotřebitelů apod. Další výklad se zaměří na funkce dvou proměnných.

Funkce dvou proměnných

Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je předpis, který každé dvojici reálných čísel $[x, y] \in M$, kde $M \sqsubseteq E_2$, tj. M je část roviny, případně celá rovina, přiřazuje jediné reálné číslo z. Tento předpis může být zadán výrazem, tabulkou, slovní formulací nebo graficky. Stejně jako u funkce jedné proměnné, nazýváme argumenty funkce f *nezávisle proměnnými* a funkční hodnotu z *závisle proměnnou*. M představuje definiční obor funkce f a značí se $D(f)$. V případě, že definiční obor $D(f)$ není zadán, rozumí se jím množina všech bodů, ve kterých je daná funkce definována (tj. má smysl), existuje pro ně její funkční hodnota.

Příklad: Určete definiční obor zadané funkce.

$$z = f(x, y) = \frac{1}{(x - y) * (x + 3)}$$

Funkce je definována v rovině E_2 vyjma dvojic bodů $[x, y]$ ve kterých je jmenovatel zlomku funkce roven nule.

$x + 3 \neq 0$ $\qquad$ $x - y \neq 0$

$x \neq -3$ $\qquad$ $y \neq x$

Přímky $y = x$ a $x = -3$ nepatří do definičního oboru.

V případě, že dosadíme do předpisu funkce za x, y pevně zvolené hodnoty a, b z jejího definičního oboru, tj. $x = a, y = b$, obdržíme *funkční hodnotu funkce* f *v bodě* $[a, b]$.

Příklad: Vypočtěte funkční hodnotu funkce $z = f(x, y) = x^2 + 3xy$ v bodě $x = 2, y = 1$.
$z = f(2,1) = 2^2 + 3 * 2 * 1 = 10$

Graf funkce

Grafem funkce dvou proměnných je (nejčastěji) *plocha v prostoru*. Body prostoru jsou reprezentovány trojicemi čísel $[x, y, z]$. Pro jejich znázornění volíme tři navzájem kolmé přímky x, y, z procházející týmž bodem – *počátkem* O. Přímka z je ve svislé poloze a všechny úhly mezi nimi jsou tupé (*axonometrie*). Přímky x, y, z se nazývají *souřadnicové osy* a spolu s kladným a záporným označením směru, počátkem O a zvolenou jednotkou délky tvoří *soustavu souřadnic*. Přičemž pořadí os x, y, z je důležité a tvoří tzv. *pravotočivou soustavu souřadnic*. Protože „ruční“ znázorňování grafů funkcí dvou proměnných je značně obtížné, geografové přišli na myšlenku tzv. *vrstevnic* – čar spojující body o téže nadmořské výšce, kdy lze plochy názorně modelovat v rovině. Hovoříme o *indiferenčních křivkách* jako spojnicích bodů, pro něž funkce $f(x, y)$ nabývá stejné hodnoty. Indiferenční křivka je dána rovnicí:

$f(x, y) = c$, kde c je pevně zvolená funkční hodnota funkce f.

Množina všech indiferenčních křivek se nazývá *indiferenční mapa*. Jednotlivé indiferenční křivky jsou obvykle v indiferenční mapě označeny funkční hodnotou, kterou funkce na dané křivce nabývá. Funkce dvou proměnných nachází využití v analýzách ekonomických jevů velmi často, s indiferenčními křivkami se můžeme setkat například v teorii užitku či produkce.

Pozor na fakt, že grafické vyjádření ztrácí pro funkce tří a více proměnných smysl. Těmi se ovšem zabývat nebudeme.

Parciální derivace

Chceme-li vědět, jak se funkce dvou proměnných změní v závislosti na změně jedné z nezávislých proměnných (x nebo y), rozhodneme o tom pomocí *parciálních derivací* funkce. *Parciální derivace funkce* $f(x, y)$ *podle proměnné* x je funkce, která vznikne derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné x, přičemž proměnná y se při derivaci považuje za konstantu. Značíme $f_x'(x, y)$ nebo zkráceně f_x'.

Analogicky:
parciální derivace funkce $f(x,y)$ *podle proměnné* y je funkce, která vznikne derivací funkce $f(x,y)$ podle proměnné y, přičemž proměnná x se při derivaci považuje za konstantu. Značíme $f_y^{'}(x,y)$ nebo zkráceně $f_y^{'}$.

Výsledkem parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x nebo y je opět funkce dvou proměnných x, y.

Příklad: Vypočtěte parciální derivaci zadané funkce podle proměnné x a následně podle proměnné y.

$$f(x,y) = \mathrm{x}^5 - \mathrm{y}^3 - xy - x^2y^2$$

$f_x^{'}(x,y) = 5x^4 - y - 2xy^2$

$f_y^{'}(x,y) = -3y^2 - x - x^2 2y$

V případě, že dosadíme do parciální derivace funkce podle proměnné x pevně zvolené x, y, například $x = a$, $y = b$, dostaneme *parciální derivaci funkce* f *podle* x *v bodě* $[a,b]$. Značíme $f_x^{'}(a,b)$.
Analogicky:
v případě, že dosadíme do parciální derivace funkce podle proměnné y pevně zvolené x, y, například $x = a$, $y = b$, dostaneme *parciální derivaci funkce* f *podle* y *v bodě* $[a,b]$. Značíme $f_y^{'}(a,b)$.

Příklad: Vypočtěte parciální derivaci zadané funkce podle x i y v bodě $[1,2]$.

$$f(x,y) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^3 + xy$$

$f_x^{'}(x,y) = 2x + y$

$f_x^{'}(1,2) = 2 * 1 + 2 = 4$

$f_y^{'}(x,y) = 3y^2 + x$

$f_y^{'}(1,2) = 3 * 2^2 + 1 = 13$

Protože parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle proměnné x, resp. y je opět funkce dvou proměnných x,y, můžeme ji znovu (opakovaně) parciálně derivovat podle některé z těchto proměnných. Mluvíme o *parciálních derivacích vyšších řádů*. Proměnné, podle kterých derivujeme, zapisujeme v příslušném pořadí jako dolní index, do horního indexu se připisují čárky (při větším počtu číslice) určující řád parciální derivace. V případě, že se při výpočtu vyšších parciálních derivací nemění proměnná, podle které derivujeme, můžeme tyto parciální derivace vyšších řádů označit jako *čisté parciální derivace* daného řádu. Pro spojité vyšší parciální derivace, které se liší pouze pořadím derivace, platí vzájemná rovnost.

Příklad: Vypočtěte všechny první a druhé parciální derivace zadané funkce.

$$f(x,y) = 2x^2y^3 + xy - y^2 + 2x^3$$

$f_x^{'}(x,y) = 4xy^3 + y + 6x^2$

$f_y^{'}(x,y) = 6x^2y^2 + x - 2y$

$f_{xx}^{''}(x,y) = 4y^3 + 12x$

$f_{yy}^{''}(x,y) = 12x^2y - 2$

$f_{xy}^{''}(x,y) = 12xy^2 + 1$

$f_{yx}^{''}(x,y) = 12xy^2 + 1$

Interpretace parciálních derivací

Geometrický význam parciálních derivací spočívá v existenci tečné roviny k příslušné ploše. V případě, že v některém bodě plochy nelze sestrojit tečnu roviny, signalizuje to neexistenci parciálních derivací v daném bodě. Těmito body jsou hroty, body hran a podobně. Plochy, které takové body nemají, mají tedy ve všech bodech parciální derivace, se nazývají *hladké*.

Pro inženýrskou interpretaci se užívá dvou alternativních formulací.

1) $f_x^{'}(x,y)$ pro pevně zadané $x = a$, $x = b$, udává rychlost změny funkce f vzhledem k x v bodě $[a,b]$.

   $f_y^{'}(x,y)$ pro pevně zadané $x = a$, $x = b$, udává rychlost změny funkce f vzhledem k y v bodě $[a,b]$.

2) $f_x^{'}(x,y)$ pro pevně zadané $x = a$, $x = b$, udává přibližnou změnu funkce f odpovídající změně x z hodnoty a na hodnotu $a+1$ při pevném $y = b$.

   [Změní-li se x z a na $a+1$ při pevném $y = b$, změní se f přibližně o $f_x^{'}(a,b)$.]

   $f_y^{'}(x,y)$ pro pevně zadané $x = a$, $x = b$, udává přibližnou změnu funkce f odpovídající změně y z hodnoty b na hodnotu $b+1$ při pevném $x = a$.

   [Změní-li se y z b na $b+1$ při pevném x$= a$, změní se f přibližně o $f_x^{'}(a,b)$.]

Příklad: Interpretujte $f_x'(3,1) = 5$ a $f_y'(3,1) = 8$.

$f_x'(3,1) = 5$ udává: změní-li se x z 3 na 4 při pevném $y = 1$, vzroste f přibližně o 5 – alternativně: funkce f na hladině $x = 3$ roste 5krát rychleji než x při pevném $y = 1$.

$f_y'(3,1) = 8$ udává: změní-li se y z 1 na 2 při pevném $x = 3$, vzroste f přibližně o 8 – alternativně: funkce f na hladině $y = 1$ roste 8krát rychleji než y při pevném $x = 3$.

Diferenciál

Změna funkce Δf je dána výrazem:

$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, kde Δx a Δy jsou jednotlivé změny proměnných x, y.

Tuto změnu lze odhadnout diferenciálem df funkce $f(x, y)$, kde dx, dy se píše namísto Δx, Δy:

$$df = f_x' dx + f_y' dy.$$

Pro malé změny dx, dy pak platí:

$$\Delta f \approx df = f_x' dx + f_y' dy.$$

Příklad: Užitím diferenciálu odhadněte změnu zadané funkce f při přechodu z bodu [1,4] do bodu [2,3].

$$f(x, y) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^3 + xy$$

$f_x'(x, y) = 2x + y$

$f_y'(x, y) = 3y^2 + x$

$dx = 2 - 1 = 1$

$dy = 3 - 4 = -1$

$$\Delta f \approx df = f_x' dx + f_y' dy$$

$$\Delta f \approx df = (2x + y) * 1 + (3y^2 + x) * (-1) = (2 * 1 + 4) * 1 + (3 * 4^2 + 1) * (-1) =$$
$$= 6 + (-48) = -42$$

Funkce f poklesne přibližně o 42.

Extrémy funkce dvou proměnných

Extrémy funkce dvou proměnných jsou definovány analogicky jako extrémy funkce jedné proměnné. Stejně jako u funkce jedné proměnné je rozdělujeme na *lokální* a *globální*. Hledání extrémů funkcí více proměnných má podstatný význam v optimalizačních ekonomických úlohách, kde zkoumáme závislosti více veličin. Následující část bude věnována pouze lokálním extrémům.

Lokální extrémy

Funkce $f(x,y)$ má v bodě $A\,[a,b]$ minimum, resp. maximum, (tj. extrém funkce) jestliže existuje otevřený kruh $O(A)$ obsahující bod A takový, že pro všechny body $[x,y]$ tohoto kruhu, avšak různé od bodu A platí:

$$f(x,y) > f(a,b), \text{ resp. } f(x,y) < f(a,b).$$

Obvykle je důležitá i příslušná hodnota, kterou funkce f nabývá v bodě extrému. Získáme ji prostým dosazením a, b do funkce. Podle nutné podmínky pro existenci extrému funkce dvou proměnných nastane lokální extrém v bodě, kde tečná rovina k ploše $z = f(x,y)$ je rovnoběžná s osou x a osou y. Tuto nutnou podmínku pro extrém můžeme definovat jako:
má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[a,b]$ extrém a existují-li $f_x'(a,b)$, $f_y'(a,b)$, pak platí

$$f_x'(a,b) = f_y'(a,b) = 0.$$

Body, které splňují tento vztah, označujeme *body podezřelé z extrému* (*stacionární body*). Funkce však může mít extrém i v bodě, ve kterém neexistují parciální derivace (plochy s hroty) – u těchto funkcí vyšetřujeme extrémy pomocí definice extrému. Vzhledem k výjimečnosti se jimi zabývat dále nebudeme.

Nutná podmínka pro extrém dává jistotu, že v bodech, v nichž parciální derivace existují a neplatí vztah $f_x'(a,b) = f_y'(a,b) = 0$, nemůže být extrém. V bodech, ve kterých tento vztah platí, extrém být může, ale nemusí. Pro potvrzení, resp. vyloučení extrému následně musíme použít podmínku, která využívá druhých parciálních derivací.
Nechť $[a,b]$ je bod podezřelý z extrému funkce f a funkce f má všechny druhé parciální derivace spojité na nějakém otevřeném kruhu obsahujícím bod $[a,b]$. Poté vztah pro potvrzení, resp. vyloučení extrému definujeme:

$$D(x,y) = f_{xx}''(x,y)f_{yy}''(x,y) - [f_{xy}''(x,y)]^2$$

Jestliže $D(x,y) > 0$ v bodě $A[a,b]$, pak funkce f má v bodě $A[a,b]$ extrém, a to *maximum* jestliže $f_{xx}''(x,y) < 0$ v bodě $A[a,b]$, resp. *minimum*, jestliže $f_{xx}''(x,y) > 0$ v bodě $A[a,b]$.

Jestliže $D(x,y) < 0$ v bodě $A[a,b]$, pak funkce f nemá v bodě $[a,b]$ extrém.
Jestliže $D(x,y) = 0$ v bodě $A[a,b]$, pak nemůžeme na základě této podmínky rozhodnout o extrému funkce f bodě $[a,b]$.

Příklad: Určete extrémy zadané funkce.

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

Funkce je definována na celé rovině E_2. Pro určení stacionárních bodů určíme první parciální derivace.

$$f_x'(x,y) = 2x$$

$$f_y'(x,y) = 4y$$

Pro bod podezřelý z extrému musí platit: $f_x'(a,b) = f_y'(a,b) = 0$. Tedy: $2x = 0$ a $4y = 0$.

Tato soustava má jediné řešení: bod podezřelý z extrému $A[0,0]$. Určíme druhé parciální derivace.

$$f_{xx}''(x,y) = 2$$

$$f_{yy}''(x,y) = 4$$

$$f_{xy}''(x,y) = 0$$

Druhé parciální derivace dosadíme do podmínky pro potvrzení, resp. vyloučení extrému.

$$D(0,0) = f_{xx}''(0,0) f_{yy}''(0,0) - [f_{xy}''(0,0)]^2 = 2 * 4 = 8$$

Protože $D(0,0) > 0$, funkce má v bodě [0,0] extrém, a to minimum, protože $f_{xx}''(x,y) = 2 > 0$.
Toto minimum nabývá hodnoty $f(0,0) = 0^2 + 2 * 0^2 = 0$.

Použitá literatura:

MEZNÍK, Ivan. *Matematika II*. Vyd. 11., přeprac. /. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2009, 105 s. ISBN 978-80-214-3816-3.
Vlastní zápisky ze studia na vysoké škole.