

1.1 Funkce ¹

V životě se běžně setkáváme se vztahem závislosti mezi různými proměnnými. Takovým vztahem závislosti může být například cena akciového titulu v závislosti na čase nebo teplota v místnosti v závislosti na množství dodaného tepla. Funkční závislost je nejvýznamnějším typem závislostí. Matematickým modelem funkční závislosti je pojem **funkce**.

Funkce f je předpis, který každému číslu $x \in D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in H$. Poté píšeme: $y = f(x)$, kde x nazýváme **nezávisle** proměnnou (argumentem funkce) a y **závisle** proměnnou (funkční hodnotou). Množina D se nazývá definiční obor funkce a značí se $D(f)$. Množina H se nazývá obor hodnot funkce a značí se $H(f)$.

Definiční obor funkce $y = f(x)$ představuje množinu všech reálných čísel, pro kterou má daná funkce smysl (pokud při zadávání funkce není uvedeno jinak). V tabulce číslo 1 jsou uvedeny omezující podmínky nejčastěji frekventovaných funkcí. Obor hodnot funkce $y = f(x)$ představuje množinu čísel, ke kterým existuje $x \in D(f)$

Tab. 1: Omezující funkce definičního oboru

Funkce	Podmínka
$\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}}$	$\text{jmenovatel} \neq 0$
$\sqrt[n]{x}, \text{ kde } (n \% 2) = 0$	$x \geq 0$
$\log_a(x)$	$x > 0$
$\arcsin(x)$	$-1 \leq x \leq 1$
$\arccos(x)$	$-1 \leq x \leq 1$
$\text{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$
$\text{cotg}(x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

¹ V tomto textu se pojmem funkce uvažuje funkce jedné proměnné

Funkce může být zadána několika způsoby, obvykle:

- **Rovnicí** - nejčastější způsob zápisu.
- **Slovním předpisem** - pro popis funkce může být využito i slovní vyjádření. Například: každému reálnému číslu x je přiřazen jeho dvojnásobek nebo náklady za dopravu jsou dány součinem počtu ujetých kilometrů a kilometrovým sazebníkem.
- **Tabulkou** - známe hodnoty funkce pro několik hodnot argumentu funkce, ale nemáme dány hodnoty funkce pro jiné nezadané hodnoty argumentu (častý případ při empirických výzkumech, tabulky mohou být dále zpracovány například prostředky regresní analýzy, pomocí numerických metod atd.).
- **Graficky** - je patrný vývoj jednotlivých hodnot, ale nelze určit přesnou hodnotu v konkrétním bodě.

Graf funkce f je množina všech bodů v rovině xy (tzv. kartézská soustava souřadnic²) o souřadnicích $[x;f(x)]$.

1.1.1 Základní vlastnosti

1 Sudost a lichost

Funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$.

Funkce f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

2 Monotónnost

Nechť je dána funkce f , $M \in D(f)$ a pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí $x_1 < x_2$.

Funkce f je **rostoucí** na množině M , jestliže platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f je **klesající** na množině M , jestliže platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f je **nerostoucí** na množině M , jestliže platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f je **neklesající** na množině M , jestliže platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Je-li funkce f neklesající nebo nerostoucí na celém svém intervalu, označujeme ji jako **monotónní**.

² Více informací o soustavách souřadnic lze nalézt např. na internetové stránce http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/GVS/texty/L1_soustavy_souradnic.pdf

Je-li funkce f rostoucí nebo klesající na celém svém intervalu, označujeme ji jako **ryze monotónní**.

3 Ohraničenost

Funkce f je **ohraničená shora**, jestliže existuje takové číslo H , že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq H$.

Funkce f je **ohraničená zdola**, jestliže existuje takové číslo H , že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq H$.

Je-li funkce f ohraničená shora i zdola, označujeme ji jako **ohraničenou**.

Není-li funkce f ohraničená shora ani zdola označujeme ji jako **neohraničenou**.

4 Periodičnost

Funkce f je **periodická** s periodou p , jestliže definiční obor obsahuje s každým bodem x také bod $x + p$, kde $p > 0$ a platí $f(x + p) = f(x)$.

5 Prostá funkce

Funkce f je označována jako **prostá**, jestliže pro dvě libovolná čísla $x_1, x_2 \in D(f)$, přičemž $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

1.1.2 Aritmetické operace

Funkce můžeme sčítat, odčítat, násobit a dělit. Aritmetické operace funkcí f a g se definují a značí takto [$x \in D(f)$]:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

1.1.3 Inverzní funkce

Funkce f^{-1} , která každému $y \in H(f)$ přiřazuje $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, za podmínky, že funkce f je prostá, se nazývá **funkce inverzní** k funkci f . Podmínka prosté funkce je postačující podmínkou k tomu, aby obrácená závislost x na y byla závislostí funkční.

Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu. Platí: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$.

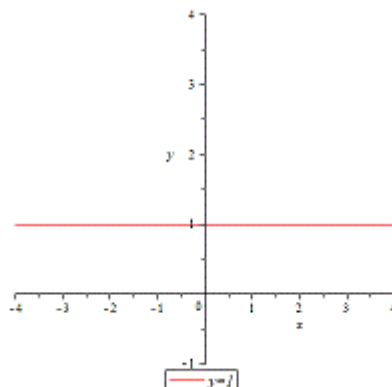
1.1.4 Základní elementární funkce

V tomto odstavci je uveden přehled nejčastěji užívaných funkcí v ekonomické praxi.

1 Konstantní funkce

Konstantní funkce je funkce, která každému $x \in R$ přiřazuje konstantní reálné číslo c . Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = c$. Jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou x .

Na obrázku číslo 2 je graf konstantní funkce $y = f(x) = 1$.



Obr. 1: Konstantní funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

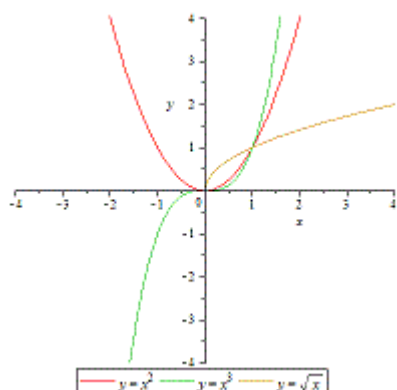
2 Obecná mocnina

Obecnou mocninou funkcí je nazývána funkce ve tvaru $y = f(x) = x^n$, kde $n \in R$, $n \neq 0$ a $x \in (0; \infty)$. Definiční obor, obor hodnot a vlastnosti obecné mocninné funkce závisí na hodnotě exponentu n . U některých typů mocninných funkcí lze rozšířit definiční obor o záporná čísla, případně o nulu.

Na obrázku číslo 3 a 4 jsou pro názornost uvedeny grafy mocninných funkcí zpracovaných v Maple.

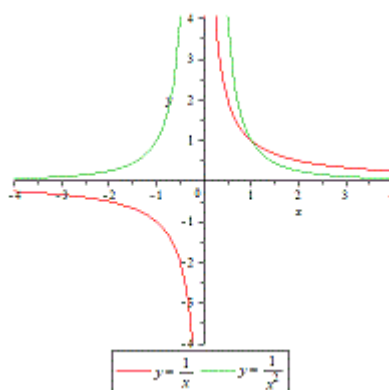
Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 3: $y = f(x) = x^2$, $y = f(x) = x^3$ a $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 4: $y = f(x) = \frac{1}{x}$ a $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Obr. 2: Mocninné funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



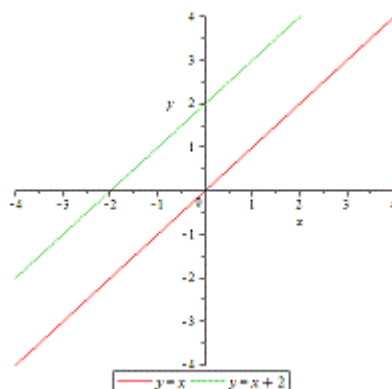
Obr. 3: Mocninné funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

3 Lineární funkce

Lineární funkce je polynomická funkce 1. stupně. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = ax + b$, kde $a, b \in R$ a $a \neq 0$. Grafem lineární funkce je přímka. Číslo a určuje sklon přímky, nazývá se též **směrnici přímky**.

Na obrázku číslo 5 jsou grafy lineárních funkcí $y = f(x) = x$ a $y = f(x) = x + 2$.

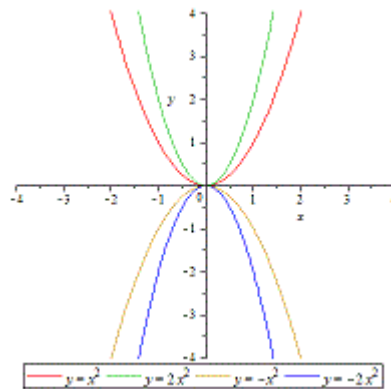


Obr. 4: Lineární funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

4 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je polynomická funkce 2. stupně. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in R, a \neq 0$. Grafem kvadratické funkce je parabola.

Na obrázku číslo 6 jsou grafy kvadratických funkcí $y = f(x) = x^2$, $y = f(x) = 2x^2$, $y = f(x) = -x^2$ a $y = f(x) = -2x^2$.

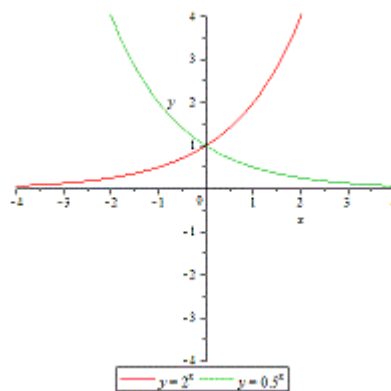


Obr. 5: Kvadratické funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

5 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci zapisujeme ve tvaru $y = f(x) = a^x$, kde $a > 0, a \neq 1$. Pro $a > 1$ je funkce rostoucí na celém definičním oboru, pro $0 < a < 1$ je funkcí klesající na celém definičním oboru. Hodnotu a nazýváme základ. Často používaný je přirozený základ $e \cong 2,7$.

Na obrázku číslo 7 jsou zobrazeny grafy exponenciálních funkcí $y = f(x) = 2^x$ a $y = f(x) = 0,5^x$.

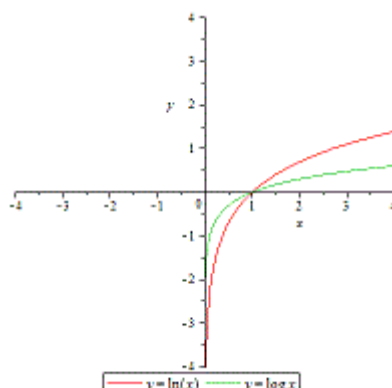


Obr. 6: Exponenciální funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

6 Logaritmická funkce

Funkce $y = f(x) = \log_a x$, kde $a > 0, a \neq 1$ se nazývá logaritmická funkce o základu a . Logaritmická funkce přiřazuje každému číslu $x > 0$ takovou hodnotu y , pro kterou platí $x = a^y$. Pokud $a = e$, mluvíme o přirozeném logaritmu. Pokud $a = 10$, mluvíme o dekadickém logaritmu. Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální.

Na obrázku číslo 8 jsou zobrazeny grafy logaritmických funkcí $y = f(x) = \ln(x)$ a $y = f(x) = \log(x)$.



Obr. 7: Logaritmické funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

7 Goniometrické funkce

Mějme jednotkovou kružnici (kružnice s poloměrem $r = 1$) se středem v počátku souřadnic a polopřímku vedenou z bodu $[0; 0]$, která svírá s kladným směrem osy x úhel α . Jako A označme vzniklý průsečík této polopřímky a kružnice.

První souřadnici bodu A označíme $\cos x$, tímto způsobem je definována funkce $y = f(x) = \cos x$ (cosinus).

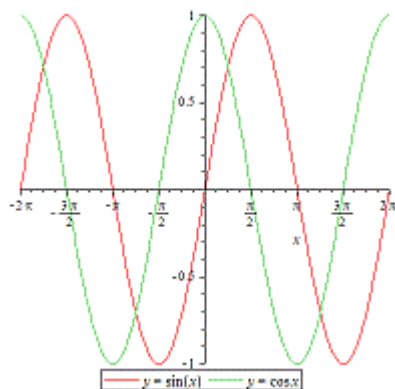
Druhou souřadnici bodu A označíme $\sin x$, tímto způsobem je definována funkce $y = f(x) = \sin x$ (sinus).

Funkce **tangens** je definována vztahem $\operatorname{tg} x = f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, pro $\cos x \neq 0$.

Funkce **kotangens** je definována vztahem $\operatorname{cotg} x = f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, pro $\sin x \neq 0$.

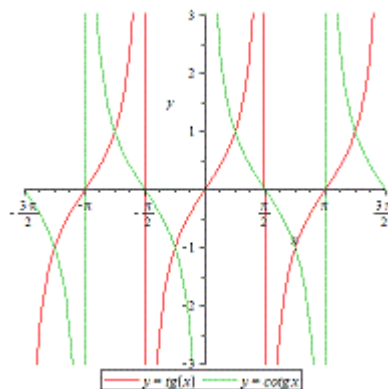
Na obrázku číslo 9 a 10 jsou grafy goniometrických funkcí v základním tvaru.

Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 9: $y = f(x) = \sin(x)$ a $y = f(x) = \cos(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 10: $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)$ a $y = f(x) = \operatorname{cotg}(x)$.



Obr. 8: Gon. funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 9: Gon. Funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

8 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým.

Funkce $y = f(x) = \arcsin x$ (**arkus sinus**) přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1; 1 \rangle$ číslo $y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro které platí $\sin y = x$.

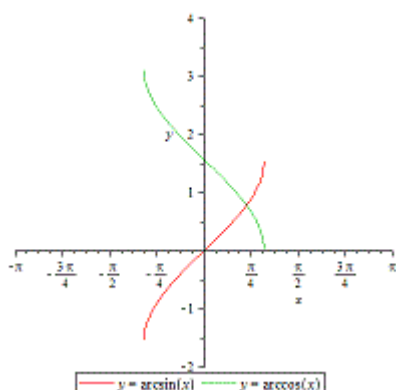
Funkce $y = f(x) = \arccos x$ (**arkus kosinus**) přiřazuje každému číslu $x \in \langle -1; 1 \rangle$ číslo $y \in \langle 0; \pi \rangle$, pro které platí $\cos y = x$.

Funkce $y = f(x) = \arctg x$ (**arkus tangens**) přiřazuje každému číslu $x \in (-\infty; \infty)$ číslo $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, pro které platí $\operatorname{tg} y = x$.

Funkce $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$ (**arkus kotangens**) přiřazuje každému číslu $x \in (-\infty; \infty)$ číslo $y \in (0; \pi)$, pro které platí $\operatorname{cotg} y = x$.

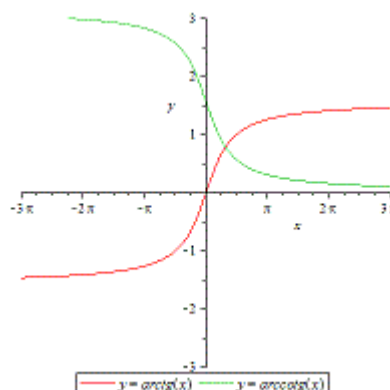
Na obrázku číslo 11 a 12 jsou grafy cyklometrických funkcí v základním tvaru.

Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 11: $y = f(x) = \arcsin(x)$ a $y = f(x) = \arccos(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 12: $y = f(x) = \arctg(x)$ a $y = f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$.



Obr. 10: Cyklometrické funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 11: Cyklometrické funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

1.1.5 Transformace elementárních funkcí

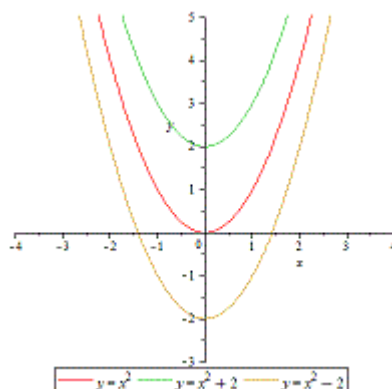
V následujícím odstavci je popsáno, jak se změní graf funkce v případě, že se částečně změní funkční předpis (tj. změna podle jistých pravidel).

Předpokládejme, že známe graf funkce $y = f(x)$, c a $k \in R$, $c > 0$, $k \neq 0$.

- **Přičtení čísla k hodnotě funkce** - graf nové funkce $y = f(x) + c$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **nahoru** (ve směru osy y).
- **Odečtení čísla od hodnoty funkce** - graf nové funkce $y = f(x) - c$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **dolů** (ve směru osy y).

Na obrázku číslo 13 je ukázka zmíněných posunů grafu funkce $y = f(x) = x^2$.

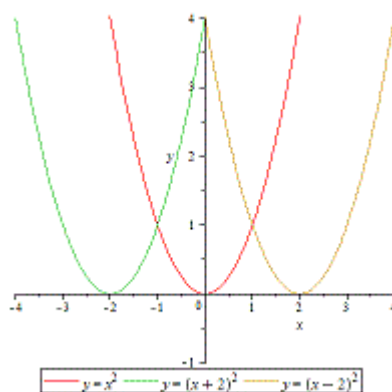
Předpisy posunutých funkcí: $y = f(x) = x^2 + 2$ a $y = f(x) = x^2 - 2$.



Obr. 12: Transformace funkcí (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

- **Přičtení čísla k argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(x + c)$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **doleva** (ve směru osy x).
- **Odečtení čísla od argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(x + c)$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **doprava** (ve směru osy x).

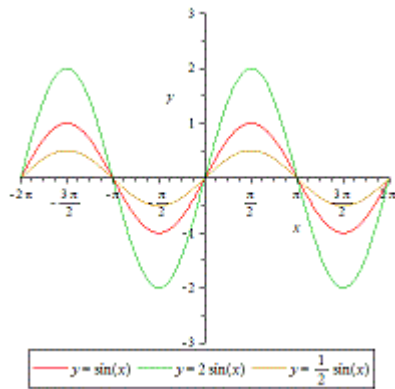
Na obrázku číslo 14 jsou zachyceny zmíněné posuny grafu funkce $y = f(x) = x^2$. Předpisy posunutých funkcí: $y = f(x) = (x + 2)^2$ a $y = f(x) = (x - 2)^2$.



Obr. 13: Transformace funkcí (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

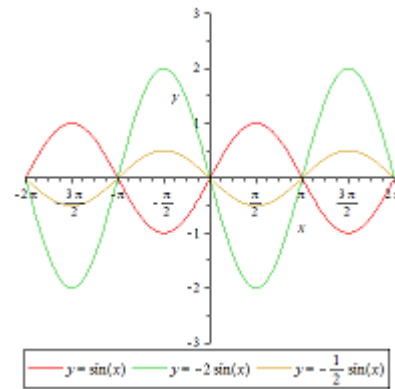
- **Vynásobení hodnoty funkce číslem** - graf nové funkce $y = k * f(x)$ vznikne:
 k -násobným protažením funkce $y = f(x)$ ve směru osy y , jestliže $k > 1$.
 k -násobným zúžením funkce $y = f(x)$ ve směru osy y , jestliže $0 < k < 1$.
překlopením grafu funkce $y = f(x)$ podle osy x , jestliže $k < 0$ a zároveň k -násobným protažením ve směru osy y , jestliže $k < -1$ nebo k -násobným zúžením ve směru osy y , jestliže $-1 < k < 0$.

Na obrázku číslo 15 a 16 jsou zachyceny zmíněné změny proporcionality grafu funkce $y = f(x) = \sin x$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 15: $y = f(x) = 2\sin(x)$ a $y = f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 16: $y = f(x) = -2\sin(x)$ a $y = f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$.



Obr. 14: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 15: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

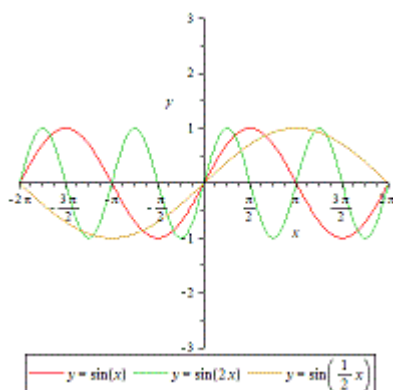
- **Vynásobení hodnoty argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(k * x)$ vznikne:

k -násobným zúžením funkce $y = f(x)$ ve směru osy x , jestliže $k > 1$.

k -násobným roztažením funkce $y = f(x)$ ve směru osy x , jestliže $0 < k < 1$.

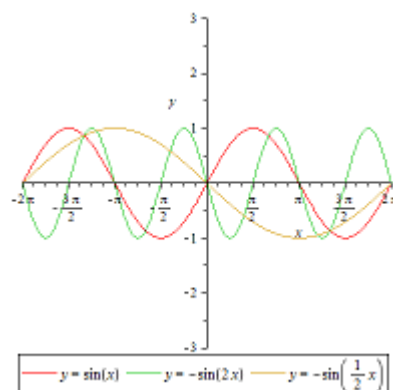
překlopením grafu funkce $y = f(x)$ podle osy y , jestliže $k < 0$ a zároveň k -násobným zúžením ve směru osy x , jestliže $k < -1$ nebo k -násobným roztažením ve směru osy x , jestliže $-1 < k < 0$.

Na obrázku číslo 17 a 18 jsou zachyceny zmíněné změny proporcionality grafu funkce $y = f(x) = \sin x$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 17: $y = f(x) = \sin(2x)$ a $y = f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 18: $y = f(x) = \sin(-2x)$ a $y = f(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$.



Obr. 16: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

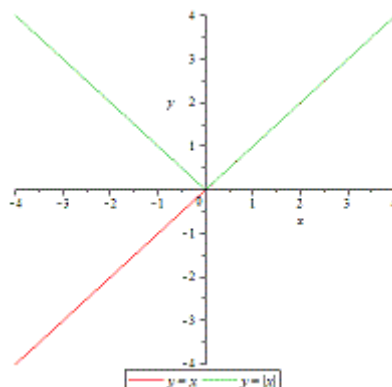


Obr. 17: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

- **Absolutní hodnota funkce** - pro x , pro která platí $f(x) \geq 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ shodné. Pro x , pro která platí $f(x) < 0$, jsou grafy funkcí $f(x)$ a $|f(x)|$ souměrné podle osy x .

Na obrázku číslo 19 jsou grafy funkcí $y = f(x) = x$ a $y = f(x) = |x|$.



Obr. 18: Absolutní hodnota funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

1.1.6 Limita funkce

Limita charakterizuje chování funkce v blízkém okolí určitého bodu, bez ohledu na to, jestli je nebo není v daném bodě funkce definována.

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A , jestliže k jakémukoliv číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in \delta$ okolí bodu x_0 , z něhož vyjmeeme bod x_0 , tj. $x \neq x_0$, je $|f(x) - A| < \varepsilon$, a značíme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Říkáme, že jde o *vlastní limitu ve vlastním bodě*. Zjednodušeně lze říci, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A , pokud se $f(x)$ liší od čísla A jen velmi málo a je-li x dostatečně blízké bodu x_0 .

Funkce má v konkrétním bodě **nejvýše** jednu limitu - buď limita existuje a je jediná, anebo limita funkce neexistuje.

Limita funkce se může vypočítat prostým dosazením za x bod x_0 v případě, je-li funkce f funkcí elementární a bod x_0 vnitřním bodem definičního oboru funkce f . Limita respektuje aritmetické operace s funkcemi.

Důležité vzorce při počítání limit (tzv. známé limity):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *nevlastní limitu* $+\infty$ ($-\infty$), jestliže k libovolně velkému číslu $K > 0$ ($K < 0$) existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in \delta$ okolí bodu x_0 , pro něhož vyjmete bod x_0 , tj. $x \neq x_0$, je $f(x) > K$ ($f(x) < K$). Říkáme, že jde o *nevlastní limitu ve vlastním bodě* a píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty).$$

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ ($-\infty$) limitu A , jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $K > 0$, že pro všechna $x > K$ ($x < -K$) platí $|f(x) - A| < \varepsilon$. Říkáme, že jde o *limitu v nevlastním bodě* a píšeme: $\lim_{x \rightarrow x_0+\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

Důležité vzorce při počítání nevlastních limit:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k, \text{ kde } k \text{ je konstanta;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

V případě, že v definici limity nahradíme pojem ryzí δ okolí pojmem levé (pravé) ryzí δ okolí, dostaneme definici limity zleva (zprava). Říkáme, že jde o *jednostranné limity* a píšeme: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$).

Limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 existuje a je rovna A , pokud $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

1.1.7 Asymptoty grafu funkce

Asymptota grafu funkce je přímka, ke které se graf funkce přibližuje, vzdalujeme-li se od počátku. Rozlišujeme dva typy asymptot:

- **Asymptota bez směrnice**

Pokud platí, že funkce má ve vlastním bodě x_0 nevlastní limitu zprava nebo zleva, pak přímka $x = x_0$ je asymptotou bez směrnice grafu funkce $y = f(x)$.

- **Asymptota se směrnicí**

Pokud platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ pro $x \rightarrow -\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$
$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

1.1.8 Spojitost funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *spojitá v bodě* x_0 , pokud platí:

1. Funkce je v bodě x_0 definována.
2. Limita funkce v bodě x_0 je rovna hodnotě funkce v bodě x_0 .

Funkce je *spojitá v intervalu* $(a; b)$, pokud je *spojitá v každém bodě* tohoto intervalu. Funkce je *spojitá v intervalu* $\langle a; b \rangle$, pokud je *spojitá v* $(a; b)$, v bodě a je *spojitá zprava* a v bodě b je *spojitá zleva*.

Pokud je funkce f *spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a; b \rangle$ a funkční hodnoty $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka, pak na daném intervalu existuje minimálně jeden nulový bod funkce f .

Seznam použité literatury

- (1) *Matematika polopatě - pro základní, střední a vysoké školy* [online]. [cit. 2012-05-05]. Dostupné z: <http://www.matweb.cz/>
- (2) MEZNÍK, Ivan. *Matematika I*. Vyd. 8., přeprac. /. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 150 s. ISBN 978-80-214-3725-8.
- (3) MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL. *Matematika pro studenty ekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 272 s. ISBN 978-80-247-3260-2.
- (4) NAVRÁTIL, Miroslav. *Matematika I.: pro distanční studium vysokých škol*. Vyd. 1. Ostrava: Key Publishing, 2008, 198 s. ISBN 978-80-87255-06-3.
- (5) REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 874 s. ISBN 0-393-95733-0.
- (6) SIMON, Carl P a Lawrence BLUME. *Mathematics for economists*. New York: W.W. Norton, c1994, 930 s. ISBN 03-939-5733-0.