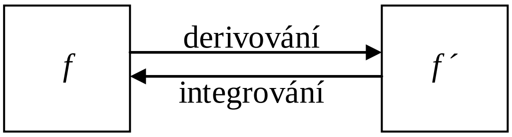
Integrální počet funkcí jedné proměnné

V diferenciálním počtu jsme určovali derivaci funkce jedné proměnné a pomocí ní vyšetřovali řadu vlastností této funkce. Pro připomenutí: derivace má uplatnění tam, kde se zkoumá povaha funkčních závislostí určitých proměnných (veličin), resp. jejich změn. Užívá se v matematice, ekonomii, fyzice, ale i v jiných vědních oborech. Pokud funkce popisuje závislost proměnné *y* na proměnné *x*, poté její derivace představuje závislost rychlosti změn *y* na *x*. Stručně uživatelsky nyní uveďme teoretický přehled pro výpočet integrálů funkcí jedné proměnné včetně aplikací na jednoduchých příkladech.

Stejně jako v diferenciálním počtu je důležitý proces derivování, tak v integrálním počtu je důležitý proces **integrování** pro studování zákonitostí dějů. Jeho cílem je najít k dané funkci *f* takovou funkci *F*, jejíž derivací je právě funkce *f*. Laicky tedy můžeme říct, že integrování je opačný proces k derivování a znázornit na schématu níže.



Neurčitý integrál

Jestliže pro funkce *F* a *f* definované na otevřeném intervalu *I* platí vztah:
$F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$, říkáme, že *F* je **primitivní funkce** k funkci *f* na intervalu *I*. Tato primitivní funkce na intervalu *I* existuje ke každé funkci *f*, která je na daném intervalu spojitá.

Pro každou primitivní funkci *F* k funkci *f* na intervalu *I* platí:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \text{ kde } C \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

Z tohoto vztahu vyplývá mnohoznačnost primitivní funkce - jestliže k funkci *f (x)* existuje primitivní funkce *F* na intervalu *I*, je takových funkcí nekonečně mnoho a liší se pouze tzv. **neurčitou konstantou** *C*. Množina všech primitivních funkcí *F+C* k funkci *f* na intervalu *I* se nazývá **neurčitý integrál** funkce *f*. Píšeme:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ kde}$$

$\int$ je integrační znak,

$\boldsymbol{f(x)}$ integrand,

$\boldsymbol{x}$ integrační proměnná,

$\boldsymbol{dx}$ diferenciál integrační proměnné,

$\boldsymbol{C}$ integrační konstanta (neurčitá konstanta).

Proces integrování je na rozdíl od procesu derivování velmi složitý. Následující část tohoto textu je proto zaměřena pouze na základní integrační metody a způsoby integrace.

Nejjednodušším způsobem výpočtu integrálu je přímá integrace pomocí vzorců převedených z derivování, vlastností integrálů, speciálních metod a pravidel či úprav integrandu.

<u>Základní vzorce platné pro integraci elementárních funkcí:</u>

1) $\int A\, dx = Ax + C;$
2) $\int x^s \; dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C$, kde: $s \in R, s \neq -1;$
3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$
4) $\int e^x\, dx = e^x + C;$
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, kde: $a > 0$, $a \neq 1;$
6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$
7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$
8) $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotg\; x + C;$
9) $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\; x + C;$
10) $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{A} + C;$
11) $\int \frac{1}{A^2 + x^2} dx = \frac{1}{A} arctg\; \frac{x}{A} + C; \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\; x + C;$
12) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$

<u>Pravidla pro integraci součtu, rozdílu a součinu funkce s konstantou</u> (za předpokladu, že existují příslušné primitivní funkce):

13) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx;$

    (Integrál součtu (rozdílu) se rovná součtu (rozdílu) integrálů.)

14) $\int c * f(x) dx = c * \int f(x) dx$, kde $c \in R$.

    (Konstantu lze vytknout před integrál.)

Příklad: Pomocí základních vzorců a úprav integrandu vypočtěte zadané integrály:

1) $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{5} + C$

3) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-4x^4} + C$

4) $\int (1-2x) dx = \int 1 dx - \int 2x dx = x + C_1 - \frac{2x^2}{2} + C_2 = x - x^2 + C$, kde $C = C_1 +$ $+C_2$

5) $\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) dx = \int x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1 + \ln|x| + C_2 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} +$ $+C_3 = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$, kde $C = C_1 + C_2 + C_3$

6) $\int \frac{10x}{5x^2+10} dx = \ln|5x^2 + 10| + C$

7) $\int \frac{30x^2}{5x^3+10} dx = 30 * \frac{1}{15} \int \frac{15x^2}{5x^3+10} dx = 2\ln|5x^3 + 10| + C$

8) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

9) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

Integrace metodou po částech

Metoda integrace **po částech** (nazývaná též jako **per partes**) umožňuje integrovat především některé součiny funkcí (například součin polynomu a logaritmické, goniometrické, cyklometrické nebo exponenciální funkce). Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu I spojité derivace, pak na daném intervalu platí:

$$\int u(x) * v'(x) dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x)\, dx.$$

Ve stručném vyjádření:

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx.$$

Tato metoda má smysl pouze v případě, pokud umíme řešit nově vzniklý integrál na pravé straně rovnosti. Je důležitá správná volba funkcí u a v'. Za nederivovanou funkci (u) volíme činitele, který neumíme integrovat. Pokud umíme integrovat oba činitele, volíme toho činitele, který se derivací více zjednoduší.

Příklad: metodou po částech vypočtěte zadané integrály:

1) $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = x * e^x - \int 1 * e^x dx = x * e^x - e^x = e^x * (x-1) + C$

(Umíme integrovat oba činitele, ovšem funkce $u = x$ se derivací zjednoduší.)

2) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x * x^{-2}\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-2} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = \ln x * \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \frac{1}{x} * \left(-\frac{1}{x}\right) dx =$

$= \frac{1}{x} * (-\ln x) + \int x^{-2} dx = \frac{1}{x} * (-\ln x) + \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{1}{x} * (-\ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} *$

$* \ (\ln x + 1) + C$

(Funkci $\ln x$ neumíme integrovat, proto jsme ji zvolili za nederivovanou.)

Integrace metodou substituce

Další metodou, která je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších integračních metod pro složitější integrál je metoda **substituce**.

Substituce typu $t = g(x)$

Jestliže funkce $t = g(x)$ má derivaci na intervalu J, zobrazuje ho na interval I a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu I, pak na intervalu J platí:

$$\int f(g(x)) * g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t = g(x)$.

Výpočet probíhá podle schématu:

$$\int f(g(x)) * g'(x) dx = \begin{vmatrix} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{vmatrix} = \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Postupujeme následovně:

1) vnitřní složku $g(x)$ funkce f nahradíme proměnou t (provedeme substituci $t = g(x)$),
2) diferencujeme pravou a levou stranu substituční rovnice podle příslušné proměnné,
3) dosadíme $t = g(x)$ a $dx = \frac{dt}{g'(x)}$ do původního integrálu,
4) po nalezení primitivní funkce F k funkci f vrátíme do výsledku původní proměnou dosazením $t = g(x)$.

Pozor: nesmí se mísit obě proměnné za jediným integračním znakem.

Příklad: Substituční metodou vypočtěte zadaný integrál:

$$\int \cos(5x+7)\,dx = \left| \begin{matrix} t = 5x+7 \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{dt}{5} \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin(5x+7) + C.$$

Substituce typu $x = g(t)$

Jestliže funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu *I*, funkce $x = g(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu *J* a zobrazuje ho na interval *I*, pak na intervalu *I* platí:

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big) * g'(t)dt,$$

Dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t = g^{-1}(x)$, kde g^{-1} je inverzní funkce k funkci g.

Výpočet probíhá podle schématu:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f\big(g(t)\big) * g'(t)dt = F(t) + C = F\big(g^{-1}(x)\big) + C.$$

Postupujeme analogicky jako u substituce typu $t = g(x)$.

Příklad: substituční metodou vypočtěte zadaný integrál.

$$\int \frac{1}{(x+16)\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ \sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{(t^2+16)t} 2t\,dt = 2 * \int \frac{1}{(t^2+4^2)}dt == 2 * \frac{1}{4} arctg\left(\frac{t}{4}\right) + C =$$

$$\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + C.$$

Integrace racionálních funkcí

Jedná se o integrály typu $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy a n, m jsou stupně polynomu.

V případě, že stupeň polynomu $P \geq$ stupeň polynomu Q $(n \geq m)$, jedná se o tzv. *neryzí racionální funkci*, kterou lze vždy vyjádřit dělením příslušných polynomů jako součet polynomu a tzv. *ryzí racionální funkce*.

Ryzí racionální funkci, kterou nelze ihned integrovat užitím vzorců pro integraci elementárních funkcí, rozložíme na součet tzv. parciálních zlomků. Jejich tvar a počet je dán polynomem $Q(x)$ rozloženým na součin kořenových činitelů:

$$Q(x) = (x - x_1) * (x - x_1)^k * (x^2 + px + q) * (x^2 + px + q)^l,$$

kde: p, q, x_1 jsou reálné konstanty, k a l jsou přirozená čísla, $k > 1$, $l > 1$.

Poznámka: U nejvyšší mocniny x je koeficient 1, kvadratické polynomy mají jako kořeny komplexně sdruženou dvojici hodnot (diskriminant je menší než 0). Naopak lineární polynomy mají reálný kořen.

Výskyt v součinu kořenových činitelů	**Do rozkladu na parciální zlomky přibude**
$(x - x_1)$	$\frac{A}{x - x_1}$
$(x - x_1)^k$	$\frac{A_1}{(x - x_1)^1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k}$
$(x^2 + px + q)$	$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$
$(x^2 + px + q)^l$	$\frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + px + q)^1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_l x + B_l}{(x^2 + px + q)^l}$

Koeficienty A_x, B_x určíme takzvanou metodou neurčitých koeficientů takto:

1) rovnici, kde na levé straně je daná racionální funkce a na pravé straně součet příslušných parciálních zlomků, vynásobíme jmenovatelem racionální funkce (polynomem $Q(x)$),
2) pravou stranu rovnice upravíme,
3) porovnáním koeficientů polynomu (u stejných mocnin x) na obou stranách rovnice obdržíme soustavu lineárních rovnic, jejich řešením jsou hledané koeficienty.

Příklad: Rozložte zadanou funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x + 2}{x^3 - x}$$

$Q(x)$ rozložíme na součin kořenových činitelů:

$$Q(x) = x^3 - x = x * (x^2 - 1) = x * (x - 1) * (x + 1)$$

$R(x)$ rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x + 2}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

Rovnici vynásobíme společným jmenovatelem:

$$x + 2 = A(x - 1)(x + 1) + Bx * (x + 1) + Cx * (x - 1)$$

Pravou stranu upravíme (roznásobíme):

$$x + 2 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx$$

Metodou porovnání koeficientů polynomu u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice určíme koeficienty parciálních zlomků:

$$x^2: 0 = A + B + C$$

$$x^1: 1 = B - C$$

$$x^0: 2 = -A$$

Řešíme tuto soustavu tří rovnic o tří neznámých A, B, C:

$A = -2$

$B = 1 + C$

$C = 0 - A - B$

$$C = 0 + 2 - 1 - C$$

$$2C = 1$$

$$C = 0{,}5$$

$B = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

Nyní je vidět, že rozklad funkce $R(x)$ na parciální zlomky lze vyjádřit takto:

$$\frac{x+2}{x^3 - x} = \frac{-2}{x} + \frac{1{,}5}{x-1} + \frac{0{,}5}{x+1}$$

Integrace parciálních zlomků

1) **parciální zlomek typu $\frac{A}{x-x_1}$**

   řešíme: vzorce, substituce

2) **parciální zlomek typu $\frac{A}{(x-x_1)^k}$**

   řešíme: vzorce, substituce

3) **parciální zlomek typu $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$**

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + K\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx$$

Upravíme na součet dvou integrálů tak, aby první z nich měl v čitateli derivaci jmenovatele a druhý konstantu. Konstantu K určíme z rovnice: $Ax + B = \frac{A}{2}(2x + b) + K$.

4) **parciální zlomek typu $\frac{A_x+B}{(x^2+bx+c)^l}$**

Analogickým postupem jako u předchozího parciálního zlomku dojdeme ke dvěma integrálům. *Z nichž jeden se vypočte substitucí, pro výpočet druhého integrálu se využívají tzv. rekurentní vzorce*[1].

[1] Podrobný návod je možno najít například v knize K. Rektorys: *Přehled užité matematiky*, 1995.

Určitý integrál

Předpokládejme, že pro funkci $f(x)$ definovanou na *uzavřeném* intervalu $< a, b >$, která je *spojitá* a *ohraničená* platí:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Určitý integrál funkce f od a do b je poté číslo:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\text{, kde:}$$

a je tzv. dolní integrační mez,

b je tzv. horní integrační mez a

$\int_a^b f(x)dx$ čteme „určitý integrál od a do b funkce $f(x)\ dx$“.

V případě že:

$a = b$ platí vztah: $\int_a^a f(x)dx = 0$;

$a > b,\ b > a$ platí vztah: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Dále pro integrovatelné funkce na intervalu <a, b> platí:

1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;
2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, kde $k \in R$;
3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, kde $c \in (a, b)$;
4) je-li f lichá funkce, pak: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;
5) je-li f sudá funkce, pak: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 * \int_0^a f(x)dx$.

Příklad: Vypočtěte zadaný určitý integrál.

$$\int_3^6 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 72 - 9 = 63$$

(Funkce x^2 je na intervalu $< 3, 6 >$ spojitá, je tedy integrovatelná.)

Metoda po částech v určitém integrálu

Mají-li funkce u a v spojité derivace na intervalu $< a, b >$, pak platí:

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$$

Příklad: Vypočtěte pomocí metody po částech zadaný určitý integrál:

$\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{vmatrix} = [\mathrm{x} * e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [\mathrm{x} * e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) =$

$= 1$

Metoda substituce v určitém integrálu

Jsou-li splněny následující předpoklady:

1) funkce g má na intervalu $< a, b >$ nenulovou derivaci,
2) funkce f je spojitá na intervalu $< \alpha, \beta >$, kde $\alpha = g(a)$, $\beta = h(b)$,
3) funkce g zobrazuje interval $< a, b >$ na interval $< \alpha, \beta >$, poté platí:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) * g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

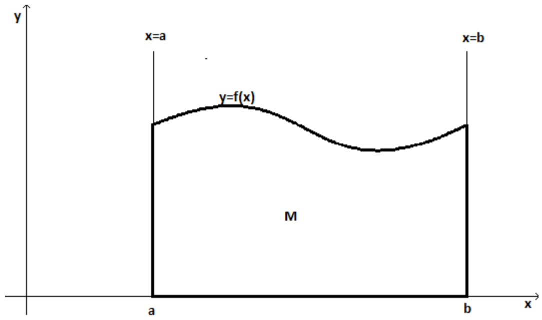
Využití substituční metody je analogické jako u neurčitého integrálu. S tím rozdílem, že musíme stejnou substitucí transformovat (přepočítat) integrační meze. To provedeme tak, že původní meze dosadíme do substituční rovnice. Použití ilustrujeme na příkladu.

Příklad: Metodou substituce vypočtěte zadaný určitý integrál:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ \alpha = \ln(e) = 1 \\ \beta = \ln(1) = 0 \end{vmatrix} = \int_0^1 t dt = \left|\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Druhou možností výpočtu určitého integrálu substituční metodou (i per partes) je samostatné vyřešení neurčitého integrálu, kdy obdržíme výsledek v proměnné x, s následným výpočtem určitého integrálu s původními mezemi.

Historickou motivací pro vznik určitého integrálu byl výpočet obsahu S_M „křivočarého lichoběžníka“. Nazývá se tak rovinný útvar M, jehož příklad je zachycen na obrázku č. 1. Je vymezen grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$.



Obrázek 1

Jestliže funkce $f(x)$ je na uzavřeném intervale $< a, b >$ spojitá a nezáporná ($f(x) \geq 0$), vyjadřuje určitý integrál

$$S_M = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

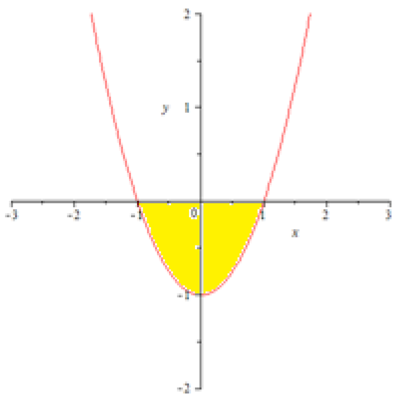
Obsah S_M rovinného útvaru M, který je omezen křivkou $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Jestliže v intervalu $< a, b >$ je $f(x) \leq 0$, je určitý integrál záporný a obsah S_M příslušného rovinného útvaru M je roven:

$$S_M = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b f(x)dx.$$

Příklad: Vypočtěte obsah rovinného útvaru M vymezeného grafem funkce $y = f(x) = x^2 - 1$ a osou x.

Nejprve načrtneme rovinný útvar M. Jedná se o parabolu, která má vrchol v bodě [0,-1] a osu x protíná v bodech $x = -1$ a $x = 1$ (viz obrázek 2).



Obrázek 2

Protože na intervalu $< -1, 1 >$ je funkce $y = x^2 - 1$ spojitá, ale záporná, použijeme pro výpočet S_M vztahu s absolutní hodnotou.

$$S_M = \left|\int_{-1}^{1}(-(x^2 - 1))dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right| = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

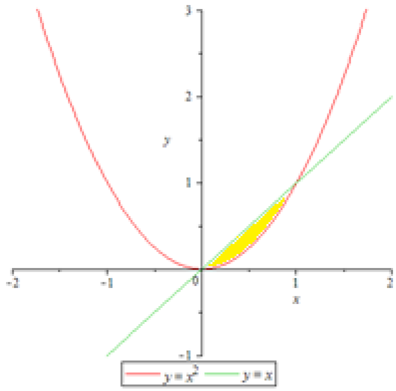
Obsah S_M rovinného útvaru M, která je ohraničená křivkou $y = x^2 - 1$ a osou x je tedy roven $\frac{2}{3}$ jednotek obsahu.

Obsah plochy ohraničené dvěma křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, spojitými na intervalu $< a, b >$, pro které platí $f(x) > g(x)$, a dále přímkami $x = a$, $x = b$ se vypočítá pomocí vzorce:

$$S_M = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Příklad: Vypočtěte obsah S_M rovinného útvaru ohraničeného grafy funkcí $y = f(x) = x^2$, $y = g(x) = x$:

Nejprve načrtneme rovinný útvar M. Nakreslíme zadané funkce a získáme rovinný útvar, jehož obsah budeme určovat.



Obrázek 3

Meze příslušného integrálu získáme řešením soustavy rovnic (jako x-ovou souřadnici průsečíků příslušných křivek) $y = x^2$, $y = x$.

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x * (x - 1) = 0$$

Tedy $x_1 = 0 = a$ a $x_2 = 1 = b$.

Obsah S_M rovinného útvaru ohraničené danými křivkami je poté roven:

$$S_M = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ jednotek obsahu.}$$

Použitá literatura:

JIRÁSEK, František a Josef BENDA. *Matematika pro bakalářské studium*. Vyd. 1. Praha: Ekopress, 2006, 506 s. ISBN 80-869-2902-7.

MEZNÍK, Ivan. *Matematika II*. Vyd. 11., přeprac. /. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2009, 105 s. ISBN 978-80-214-3816-3.

MOUČKA, Jiří a Petr RÁDL. *Matematika pro studenty ekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 272 s. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3260-2.

NAVRÁTIL, Miroslav. *Matematika I.: pro distanční studium vysokých škol*. Vyd. 1. Ostrava: Key Publishing, 2008, 198 s. ISBN 978-80-87255-06-3.