Matice

Matice A typu (m, n) je uspořádané schéma $m*n$ prvků, které jsou zapsány do m řádků a n sloupců:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Označení matic</u> – obvykle velkými písmeny abecedy (A, B, C, ..,), rozumné je přidat i typ matice (je to její významná charakteristika) =>$A(3,4)$.
<u>Označení prvků v matici</u> – malými písmeny (a, b, c, ..,), rozumné je využití indexů i, j =>$a_{i,j}$, kde i značí i-ty řádek a j značí j-ty sloupec.
Tzn.: a_{21} - značí, že prvek leží v matici ve druhém řádku a prvním sloupci.

Prvky, kde $i = j$ tvoří **hlavní diagonálu** (úhlopříčku) matice. Jde například o prvky: a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}. **Vedlejší diagonálu** tvoří prvky a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Význačné matice

Nulová – je matice, která má všechny prvky rovny nule.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Čtvercová – je matice typu (m, n), kde $m = n$. Říkáme o ní pak, že je řádu n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Matice A je řádu 3 (má tři řádky a zároveň tři sloupce), matice B je řádu 5 (má pět řádků a zároveň pět sloupců).

Obdélníková – je matice typu (m, n), kde $m \neq n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotková – je čtvercová matice, kde prvky v hlavní diagonále jsou rovny jedné, a současně všechny ostatní prvky jsou rovny nule. Značí se *E*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice k matici A – matice, která vznikne z matice *A* důslednou záměnou řádků za sloupce při zachování jejich pořadí. Značí se A^T.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Submatice matice *A* – je matice, která vznikne vynecháním některého z řádků či sloupců v matici *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice *B* je submaticí matice *A*, která vznikla vynecháním 1. řádku a 4. sloupce v matici *A*.

Matice ve stupňovitém (trojúhelníkovém) tvaru – je matice, jejíž každý následující řádek má "od začátku" alespoň o jednu nulu více než ten předchozí.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Sčítání a odčítání matic – tyto operace lze provést jen u matic stejného typu.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}; C = A \pm B$$

Pro výslednou matici C platí $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$.

// sečteme (odečteme) jednotlivé prvky na odpovídajících si pozicích, výsledná matice *C* bude stejného typu jako jsou matice *A* a *B*

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Násobení matice číslem – matici lze vynásobit jakýmkoliv reálným číslem *r*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; r = 3$$

Pro výslednou matici B platí: $b_{ij} = r * a_{ij}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$.

// každý prvek matice *A* vynásobíme daným číslem *r*, výsledná matice bude stejného typu jako matice *A*

$$r * A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Násobení matic – součin matic *A***B* je definován jen v případě, kdy matice $A(i,k)$ má tolik sloupců, jako má matice $B(k,j)$ řádků.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = A * B$$

Pro výslednou matici $C(i,j)$ platí $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$, kde *n* je počet sloupců matice *A*.

// prvek c_{ij} odpovídá součtu součinů prvků *i*-tého řádku matice *A* a *j*-tého sloupce matice *B*, výsledná matice *C* má tolik řádků jako má matice *A* a sloupců jako má matice *B*

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 4*1+2*3 & 4*1+2*0 & 4*2+2*1 \\ 3*1+1*3 & 3*1+1*0 & 3*2+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Dělení matic – není definováno.

Platnost zákonů pro operace s maticemi[1]

1. **komutativní zákon**

$$A + B = B + A$$

$$A * B \neq B * A$$

(Pro násobení matic neplatí komutativní zákon a navíc se může stát, že i když například součin matic *A**B* je definován, může se stát, že součin matic *B**A* není definován.)

Příklad:

Mějme matici *A*, která je typu (2, 2) a matici *B*, která je typu (2, 3).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A*B$ je definován (matice *A* má stejný počet sloupců jako má matice *B* řádků).

$B*A$ není definován (matice *B* nemá stejný počet sloupců jako má matice *A* řádků).

2. **asociativní zákon**, kde r a s jsou reálná čísla

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

$$r * (sA) = (rs)A$$

3. **distributivní zákon**

$$(A + B) * C = A * C + B * C$$

$$C * (A + B) = C * A + C * B$$

[1] Za předpokladu, že uvedené operace jsou definovány.

Hodnost matice

Hodnost matice A udává maximální počet lineárně nezávislých řádků, značí se $h(A)$.
Pro určení hodnosti matice je zpravidla nutné převést matici na stupňovitý tvar (trojúhelníkový tvar), poté hodnost matice ve stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků.

<u>Ekvivalentní úpravy při převodu na stupňovitý (trojúhelníkový) tvar:</u>

- zaměnit pořadí jednotlivých řádků,
- zaměnit řádky za sloupce (transponovat matici), platí $h(A) = h(A^T)$,
- vynásobit řádek libovolným nenulovým reálným číslem,
- přičíst nenulový x-násobek některého řádku k jinému řádku,
- vynechat nulový řádek,
- vynechat řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků (řádek je násobkem jiného řádku).

Všechny úpravy, které lze provést s řádky, lze provést i se sloupci.

Příklad: Zjistěte hodnost zadané matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[1.\,krok]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2.\,krok]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. krok: vynulujeme sloupec pod hlavní diagonálou

- první řádek opíšeme, nový druhý řádek získáme tak, že původní druhý řádek vynásobíme číslem (-1) a přičteme k prvnímu řádku (prvek a_{21}, tak získáme nulový prvek)
- na prvek a_{31} již je nulový prvek, třetí řádek tudíž pouze přepíšeme

2. krok: vynulujeme druhý sloupec pod hlavní diagonálou

- nyní potřebujeme získat nulový prvek již jen ve třetím řádku na druhém sloupci, proto první a druhý řádek pouze přepíšeme
- nový třetí řádek získáme tak, že původní třetí řádek vynásobíme číslem (-1) a přičteme k druhému

Nyní je matice ve stupňovitém (trojúhelníkovém) tvaru, nenachází se v ní žádný nulový řádek, tudíž $h(A)=3$.

Determinant matice

Každé čtvercové matici lze přiřadit určité číslo, které se nazývá determinant matice. Determinant pro matici A se značí $detA$ nebo $|A|$. Jedná se o základní číselnou charakteristiku čtvercové matice. Dle řádu matice jej lze vypočítat tzv. Sarrusovým pravidlem nebo rozvojem dle vybraného řádku či sloupce.

Matice 1. řádu: $detA = |a_{ij}| = a_{11}$

$A = (3)$

$detA = \mathbf{3}$

Matice 2. Řádu: $detA = a_{11*}a_{22} - a_{12} * a_{21}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$detA = 4 * 2 - (-1) * 3 = 8 + 3 = \mathbf{11}$

Matice 3. řádu: $detA = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22} * a_{13} - a_{32} * a_{23} * a_{11} - a_{33} * a_{21} * a_{a12}$(Sarrusovo pravidlo)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detA = 1 * 2 * 1 + 0 * 0 * (-1) + 3 * 2 * 1 - (-1) * 2 * 3 - 1 * 0 * 1 - 1 * 2 * 0 =$$
$$= 2 + 6 + 6 = \mathbf{14}$$

Pro usnadnění můžeme použít pomůcku, že si opíšeme první dva sloupce vpravo od determinantu. Poté vytvořme součiny: činitelé na hlavní diagonále a rovnoběžně s ní (šipky dolů), které sečteme. Od nich odečteme následující součiny: činitelé na vedlejší diagonále a rovnoběžně s ní (šipky nahoru).

$$detA = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right.$$

Výpočet determinantu rozvojem

1. krok: vybere se libovolný řádek (sloupec) matice a postupně se každý prvek zvoleného řádku (sloupce) vynásobí (-1) umocněnou na součet jeho řádkového a sloupcového indexu a determinantu, matice, která vznikne z matice A vynecháním řádku a sloupce, které se v příslušném prvku protínají.

2. krok: sečteme všechny součiny z prvního kroku

3. krok: obsahuje-li daný součet determinant vyššího řádu než 1 aplikuje se na něj znovu krok číslo 1 a krok číslo 2.

Vybráním libovolného řádku (sloupce) v kroku 1 poté hovoříme o rozvoji dle i-tého řádku (j-tého sloupce). Je výhodnější zvolit řádek či sloupec s co největším počtem nulových prvků.

Příklad: $detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Nejvýhodnější bude udělat rozvoj podle prvního řádku, protože se v něm nachází dvě nuly.

Pro rozvoj podle 1. řádku matice A platí:

$detA = (-1)^{1+1} * a_{11} * A_{11} + (-1)^{1+2} * a_{12} * A_{12} + (-1)^{1+3} * a_{13} * A_{13} + \cdots + (-1)^{1+n} * a_{1n} * A_{1n}$, kde A_{ij} je determinant, který vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$detA = (-1)^{1+1} * 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} * 0 * \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} * 0 * \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} * 1 * |2| + (-1)^{1+2} * 1 * |-1| = 2 + 1 = \mathbf{3}$$

Větší část rozvoje vypadla díky dvěma nulovým prvkům v 1. řádku, zůstal pouze jeden člen rozvoje, v němž se vyskytuje determinant druhého řádu. Tento determinant druhého řádu, byl rovněž rozvinut podle 1. řádku.[2]

Vlastnosti determinantů:

- matice a matice k ní transponovaná mají stejný determinant
- determinant, který má v některém řádku samé nuly, je roven nule
- vyměníme-li mezi sebou dva řádky, determinant změní znaménko
- je-li některý z řádků x-násobkem jiného řádku, determinant je roven nule
- hodnota determinantu se nezmění, pokud přičteme k řádku nenulový x-násobek jiného řádku

Všechny úpravy, které lze provést s řádky, lze provést i se sloupci.

[2] Šlo by již křížovým pravidlem, pro názornost způsobu výpočtu determinantu rozvojem je i determinant druhého řádu vypočítán rozvojem podle 1. řádku.

Inverzní matice

Inverzní matice k čtvercové matici A je matice, kterou označujeme A^{-1} s vlastností $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$, kde E je jednotková matice stejného řádu. Inverzní matice existuje pouze k matici, která má determinant různý od nuly (regulární matice) regulární. Existuje-li k matici matice inverzní je to matice jediná. Budeme ji určovat dvěma způsoby.

a) pomocí řádkových úprav matice A a jednotkové matice stejného řádu ,

b) pomocí determinantu a adjungované matice.

<u>Určení pomocí řádkových úprav matice A a jednotkové matice stejného řádu – Jordanovy metody:</u>

Při určování inverzní matice tímto způsobem postupujeme tak, že nejprve zapíšeme regulární matici A a napravo od ní jednotkovou matici E. Takto vzniklou matici $(A|E)$ typu $(n, 2n)$ následně upravujeme pomocí ekvivalentních úprav, dokud nezískáme matici $E|A^{-1}$. Řádkovými úpravami jsou:

- záměna libovolných řádků,
- přičtení nenulového násobku libovolného řádku k jinému řádku,
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem k.

Př.: Je dána matice A, určete k ní matici inverzní (A^{-1}).

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{0.krok}\left(\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{E}\end{array}\right)\overrightarrow{1.krok}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overrightarrow{2.krok}$$

$$\overrightarrow{2.krok}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overrightarrow{3.krok}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & -3\end{array}\right)\overrightarrow{4.krok}$$

$$\overrightarrow{4.krok}\left(\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{E} & \overbrace{\begin{matrix}-4 & 1 & -3\\ -5 & 1 & -3\\ 6 & -1 & 4\end{matrix}}^{A^{-1}}\end{array}\right)$$

0. krok - zapíšeme vedle sebe matici A a jednotkovou matici stejného řádu

1. krok - první řádek vynásobíme číslem (-2) a přičteme ho k druhému řádku, první řádek přičteme k třetímu řádku

2. krok - třetí řádek přičteme k prvnímu, třetí řádek vynásobíme číslem (-4) a přičteme ho k druhému řádku

3. krok - druhý řádek přičteme k prvnímu řádku, druhý řádek přičteme k třetímu řádku

4. krok- druhý řádek vynásobíme číslem (-1), přehodíme druhý a třetí řádek

Nyní máme v prvních třech sloupcích jednotkovou matici a ve zbývajících třech sloupcích matici inverzní k zadané matici. Jednoduchou zkouškou můžeme potvrdit správnost našeho výpočtu.

Zkouška:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Určení pomocí determinantu a adjungované matice:

Inverzní matici k regulární matici A lze vyjádřit ve tvaru: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} * (A^*)^T =$

$= \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11}^* & \dots & A_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11}^* & \dots & A_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$, kde A^* je matice vytvořená z algebraických doplňku A_{ij}^* prvků a_{ij} matice A. Tzn.: doplněk A_{11}^* je determinant submatice matice A, která vznikla vynecháním prvního řádku a prvního sloupce.

Př.: Je dána matice A, určíme k ní matici inverzní (A^{-1}).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\boldsymbol{A_{11}^*} = (-1)^{11} * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $\boldsymbol{A_{12}^*} = (-1)^{12} * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $\boldsymbol{A_{13}^*} = (-1)^{13} * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$\boldsymbol{A_{21}^*} = (-1)^{21} * \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$,$\boldsymbol{A_{22}^*} = (-1)^{22} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=1, $\boldsymbol{A_{23}^*} = (-1)^{23} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$\boldsymbol{A_{31}^*} = (-1)^{31} * \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$, $\boldsymbol{A_{32}^*} = (-1)^{32} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$=-3, $\boldsymbol{A_{33}^*} = (-1)^{33} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Jak je patrně zřejmé z průběhu určení inverzní matice, tento typ výpočtu je poměrně časově náročný.

Soustavy lineárních rovnic

Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých (x_1, x_2, x_3 ,.. , x_n) rozumíme soustavu:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \boldsymbol{R}$, a_{ij} jsou koeficienty soustavy a b_i absolutní členy (pro *i* = 1, …, *m*, a *j* = 1, …, *n*). Řešením takové soustavy je každá uspořádaná *n*-tice čísel, která po dosazení za příslušné neznámé vyhovuje všem rovnicím soustavy.

Soustavu lineárních rovnic můžeme přehledně vyjádřit v maticovém tvaru: $A * X = B$, kde

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je matice soustavy, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor neznýmých, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ je sloupec pravých stran. Dále budeme pracovat s rozšířenou maticí A|B.

$$A|B = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{matice\ \ soustavy\ \ A} & \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}}_{sloupec\ \ pravých\ stran} \end{array} \right)}_{rozšířená\ matice\ \ soustavy}$$

Obsahuje-li sloupec pravých stran samé nuly, říkáme o soustavě, že je homogenní, v opačném případě, že je nehomogenní. Homogenní soustava má vždy řešení, a to jediné nebo nekonečně mnoho. Přitom vždy má triviální (nulové) řešení.

Frobeniova věta: soustava lineárních rovnic o *n* neznámých má řešení právě tehdy, když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost *(h)*.

Jestliže $h = n$, pak má soustava právě jedno řešení.
Jestliže $h < n$, pak soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

K řešení soustavy lineárních rovnic můžeme použít Gaussovu eliminační metodu, Jordanovu metodu úplné eliminace nebo Cramerovy vzorce (pouze pro speciální typy).

Gaussova eliminační metoda:

Tato metoda spočívá v ekvivalentních úpravách rozšířené matice na stupňovitý (trojúhelníkový) tvar. Platí, že ekvivalentními úpravami se nemění množina řešení. V případě soustavy lineárních rovnic jde o:

- výměna pořadí rovnic,
- přičtení násobku libovolné rovnice k jiné rovnici,
- vynásobení libovolné rovnice nenulovým číslem k.

Př.: Řešte danou soustavu lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1$$
$$x_2 + x_3 = 0$$

Rovnice přepíšeme do maticového tvaru a upravíme na trojúhelníkový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení (neboť hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy, $\mathrm{h}(A) = h(A|B) = 3$. Toto řešení je jediné, protože hodnost matice se shoduje spočtem neznámých $n = 3$. Řešení získáme zpětným dosazováním neznámých do odpovídající trojúhelníkové matice, čímž získáme následující soustavu lineárních rovni:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_2 + 5x_3 = 3$$
$$6x_3 = 3$$

Z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_3:

$$x_3 = 0{,}5$$

Dále: z poslední rovnice vyjádříme neznámou x3, pak z druhé rovnice dosazením za $x_3$získáme x_2:

$$-x_2 + 5 * 0{,}5 = 3$$
$$x_2 = -0{,}5$$

Z první rovnice dosazením za x_2 a x_3 získáme x_1:

$$x_1 - 0{,}5 + 0{,}5 = 2$$

$$x_1 = 2$$

Řešením dané rovnice je tedy vektor $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

<u>Jordanova metoda úplné eliminace:</u>

Tato metoda spočívá v úpravě matice soustavy na jednotkovou matici. Ve sloupci na pravé straně poté dostáváme přímo hodnoty jednotlivých neznámých.

Př.: Řešte danou soustavu lineárních rovnic Jordanovou metodou úplné eliminace.

$$x_1 = 3$$

$$3x_1 + x_2 = 11$$

$$3x_2 + x_3 = 7$$

Dále sestavme rozšířenou matici soustavy, kde matici soustavy upravíme na jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení (hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy). Toto řešení je jediné, protože hodnost matice se shoduje s počtem neznámých. Získáme ho přímo ze sloupce pravých stran.

Řešením dané soustavy lineárních rovnic je tedy vektor $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.